



Rozumienie przez uczniów gimnazjum matematycznego znaczenia pojęcia „kąta”

Urszula Czahajda, Joanna Grześnik
Jadwiga Herok, Mariola Feńków

Wiek uczniów: Uczniowie klas pierwszych gimnazjum /12-13 lat.

Zadanie dla uczniów: Odpowiedz na pytanie: „Co to jest kąt?” lub „Co nazywamy kątem?”

Uzasadnienie wyboru przedmiotu badań

Przedmiotem badań naszej grupy zadaniowej będzie rozumienie przez uczniów pojęcia matematycznego „kąta”. Wybrałyśmy to pojęcie do analizy, ponieważ:

- wielu uczniów ma problem z prawidłowym rozumieniem tego pojęcia,
- uczniowie nie potrafią stosować języka matematycznego do opisu kąta,
- pojęcie kąta pojawia się we wszystkich etapach edukacyjnych wielokrotnie i to zarówno na lekcjach matematyki, jak i na innych przedmiotach, np.: na geografii, fizyce, technice,
- jest to pojęcie znane z życia codziennego i stosowane również w mowie potocznej,
- treści dotyczące kątów zniknęły z *Podstawie programowej dla gimnazjum* niemal całkowicie. Nie ma już np. „kątów w kole”, a w treściach nauczania w gimnazjum słowo „kąt” spotykamy tylko w „dwusiecznej kąta”;

Pojęcie kąta wprowadzane jest w **szkole podstawowej**. W treściach nauczania pojawiają się takie hasła, jak: „kąt”, „porównywanie kątów”, „mierzenie kątów”, „kąty wierzchołkowe”, „kąty przyległe”, a w osiągnięciach: „mierzenie i obliczanie kąta”;

Nasz zespół poddał analizie wypowiedzi uczniów na poziomie **gimnazjum**, gdzie zagadnienie kąta wykorzystywane jest przy realizacji następujących treści nauczania zawartych w znowelizowanej **Podstawie programowej** (rozporządzenie MEN z dnia 23. sierpnia 2007 r. – Dz.U. z dnia 31. sierpnia 2007 r. Nr 157, poz.1100):

- **Figury płaskie:**
 - 1) proste równoległe przecięte trzecią prostą,
 - 2) wzajemne położenie prostej i okręgu; prosta styczna,
 - 3) długość okręgu; pole koła,
 - 4) twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowania,
 - 5) cechy przystawania trójkątów,
 - 6) oś symetrii figury; środek symetrii figury; symetralna odcinka i **dwusieczna kąta**;
 - 7) okrąg opisany na trójkącie; okrąg wpisany w trójkąt,
 - 8) twierdzenie Talesa,
 - 9) cechy podobieństwa trójkątów.
- **Bryły:**
 - 10) graniastoslupy,
 - 11) ostrosłupy,
 - 12) bryły obrotowe: walce, stożki, kule,
 - 13) pola powierzchni i objętości brył.

Realizując treści jw. mówimy o kątach pośrednio, tzn. nie precyzujemy, co to jest kąt, tylko *operujemy pojęciem* jako już czymś znanym dla ucznia ze szkoły podstawowej. Dlatego też warto sprawdzić, czy jest to słuszne rozumowanie.

Odpowiedź modelowa

Kątem (płaskim) nazywamy **każdą z dwóch części płaszczyzny** zawartą między dwiema półprostymi o wspólnym początku zwanym **wierzchołkiem kąta** wraz z tymi półprostymi **zwanymi ramionami kąta**.

Inna definicja:

Kąt – jest to część płaszczyzny ograniczona dwiema półprostymi o wspólnym początku wraz z tymi półprostymi.

Na podstawie: adresu strony Internetowej <http://pl.wikipedia.org/> oraz podręcznika uzupełniającego do nauki matematyki w klasach IV-VIII szkół podstawowych „Przewodnik po matematyce i zbiór zadań dla klas IV-VIII. Część II Geometria.” – R. Kalina, T. Szymański, F. Linke.

Odpowiedzi uczniów (klasyfikacja)

Poniżej dokonano klasyfikacji odpowiedzi uczniów na pytanie „Co to jest kąt?”, „Co nazywamy kątem?”

Lp.	Kategoria	Odpowiedzi uczniów w formie dosłownej
1.	Pojęcie odnosi się do doświadczeń ucznia, np. „kara”;	<ul style="list-style-type: none"> • kara w szkole – stać w kącie; • do kąta idziemy za karę; • można iść do kąta; • kąć może być też karą, np. „Idź do kąta!”; • kąć może być w pokoju, przy którym stoi dziecko za karę jak coś narozrabia;
2.	Pojęcie odnosi się do sposobu wyznaczania miary;	<ul style="list-style-type: none"> • kąć obliczamy stopniami, tak obliczamy miary kątów; • kąć mierzymy kątomierzem; • możemy je mierzyć przy pomocy kątomierza; • ma 90^0. Mierzy się go kątomierzem; • kąć ma 90^0 i mierzy się go kątomierzem; • kąć możemy zmierzyć za pomocą kątomierza; • każdy kąć ma <i>ileś stopni</i>; • kątem płaskim nazywamy <i>coś, co ma stopnie</i>; • kąty mają odpowiednią dla siebie miarę; • kąć mierzy się w stopniach; • kąć oznaczamy stopniami; najczęściej oznaczany stopień nachylenia; kąć prosty <i>wynosi</i> 90^0; • <i>to jakiś odcinek</i>, który mierzy się w stopniach; • <i>to odległość</i> pomiędzy dwoma odcinkami;
3.	Pojęcie odnosi się do ekonomii;	<ul style="list-style-type: none"> • kojarzy mi się również z kontem w banku, w którym rodzice przechowują swój dorobek, np. ING Bank Śląski; • jest to np. konto w banku; • konto może być w banku; • jest to konto w banku;
4.	Pojęcie odnosi się do konkretnych przedmiotów, obiektyw, np. kąć w mieszkaniu;	<ul style="list-style-type: none"> • kąć kojarzy mi się także z życiem, czyli kąć w pokoju, np. <i>róg</i> w pokoju; • można mieć swój kąć w pokoju, w domu; • <i>róg</i> w pomieszczeniu, na boisku, w sklepie; • często mówimy „cztery kąty”, co oznacza zazwyczaj swój pokój;

		<ul style="list-style-type: none"> • kąt jest w każdym pomieszczeniu; • kątem może być kąt w pokoju; • kąt jest to <i>róg</i> w pokoju; • kąt może być w ścianie, podłodze; • kąt jest to, np. kąt między ścianą; • to jest <i>róg</i>;
5.	<p>Jako pojęcie matematyczne /geometryczne, występujące w figurach;</p>	<ul style="list-style-type: none"> • jest to pojęcie matematyczne; • jest to kąt figury, który może mieć różne stopnie; • kąt jest używany w geometrii, np. kąt w trójkącie, kwadracie, prostokącie (figury geometryczne); • kąt jest używany w matematyce; • kąt jest to <i>wyrażenie matematyczne</i>, które <i>wnioskuje</i> pod jakim kątem leży dom, narysowana figura geometryczna i inne rzeczy. Kąt zaliczamy do <i>geometrycznej części</i> matematyki; • z kątem kojarzy mi się matematyka, geometria i figury geometryczne. Występują właśnie w figurach geometrycznych. Są kąty proste – 90^0, kąty w trójkącie, kwadracie, trapezie, itd.; • jest to <i>wyrażenie matematyczne</i>; • kąt może być w figurze; • kąt w figurze geometrycznej. W figurze są np. cztery kąty; • kąt ma kształt niedokończonego trójkąta; • kąty występują w figurach geometrycznych: w kwadracie, trójkącie, prostokącie,... • kąty mają różne stopnie: 45, 90; • kąt jest to <i>czubek figury</i> na prostokącie; • <i>tuk</i>, który ma pewną liczbę stopni; • kąty mogą mieć swoje pole; • wszystkie figury mają kąt; • kąt jest to <i>krawędź jakiejś figury</i> o dowolnym kształcie; • kąt ma każda figura;

		<ul style="list-style-type: none"> • kąt jest to <i>róg</i> np. pomieszczenia, figury, oblicza się go kątomierzem i podaje się go w stopniach; • występuje w figurach geometrycznych; występuje w każdej figurze geometrycznej oprócz koła i okręgu; • kąty można oznaczać też w figurach; • mogą występować w trójkątach i tak dalej;
6.	Jako pojęcie matematyczne odnoszące się do rodzajów kąta;	<ul style="list-style-type: none"> • występują różne rodzaje kątów, np. rozwarty, prosty, mają np. 30°, 45°; • rozróżniamy kąty <i>prostopadłe</i>, ostre, rozwarte, itp.; • w matematyce jest ich 5. Mogą być wklęsłe i wypukłe; • kąt kojarzy mi się z matematyką, np. kąt prosty, kąt ostry; • wyróżniamy kąty: wypukły, wklęsły, ostry, itp.; • kąt może być prosty, ma 90°, może być wklęsły i wypukły; • kąt jest prosty; • kąt jest to kąt np. 45°, 90°, 180°, 360°; • są różne rodzaje kątów: rozwarty, wklęsły, wypukły; • mamy kilka rodzajów kątów: pełny, półpełny, prosty, rozwarty, ostry; • kąty mogą być: rozwarte, pełne, półpełne, proste, ostre, wklęsłe; • kąty mają różne miary dochodzące do 360°; • kąt który jest płaski, ma 90°; • kąt płaski, to kąt który leży na płaszczyźnie i nie ma 90° tylko jest rozwarty; • kąt który ma 90° i jest prosty i również kąt który ma 180°; • jest to kąt ostry; • jest to na przykład kąt ostry; • kąt płaski to kąt który posiada 90°; • jest <i>zrobiony</i> na płaszczyźnie i ma 180°;

		<ul style="list-style-type: none"> • są kąty proste i rozwarte; • może być prosty, równoramienny, rozwarty; • może być ostry, rozwarty, wklęsły;
7.	Ze względu na wyróżnienie elementów /figur składowych kąta;	<ul style="list-style-type: none"> • kąt składa się z dwóch ramion i wierzchołka. Może mieć od $0^0 - 180^0$; • jest to <i>róg</i> jakiejś <i>figury</i>, np. trójkąta, prostokąta, <i>sześcianu</i>, kwadratu; • kąt jest to <i>wierzchołek zazwyczaj wklęsły</i>; • kąt tworzą dwie proste, kąt powstaje przy wierzchołku; • kąt jest to złożenie dwóch prostych, każdy kąt ma swój wierzchołek; • kąt to dwie półproste połączone wierzchołkami • kąt jest to punkt; • kąt jest wierzchołkiem dwóch lub więcej odcinków, kąt płaski jest narysowany na płaszczyźnie; • kąt jest to złączenie ze sobą dwóch dowolnych odcinków, kąty mogą być ostre, rozwarte, ...; • Kąt to jest kąt gdzie stykają się dwa odcinki; • Kąt – <i>linie</i> do siebie prostopadłe; • to <i>jakby róg</i> trójkąta; może być: ostry, prosty, rozwarty, półpełny itd.; • <i>to łuk</i>, od którego <i>odchodzą 2 linie</i>; suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180°;
8.	Pojęcie związane z prostymi przecinającymi się;	<ul style="list-style-type: none"> • składa się z dwóch prostych przecinających się od $0^0 - 360^0$; • składa się z dwóch prostych <i>linii</i> i może mieć od $0^0 - 360^0$; • są to dwie <i>linie</i> stykające się jednym z <i>końców</i>; • kątem nazywamy dwie <i>linie</i> złączone <i>końcówkami</i> w figurze geometrycznej; • kąt jest zawarty między dwiema <i>liniami</i> prostymi, może mieć max 360°;

		<ul style="list-style-type: none"> • kąć nazywamy <i>miejsce</i> między dwoma <i>liniami</i>; • kąć to dwie <i>linie</i> tworzące kąć; • kąć to dwa odcinki lub <i>linie</i> proste nachylone tworzą kąć; • Kąć – to dwie <i>linie</i>, które się złączając tworzą kąć; • Kąć płaski to kąć, który znajduje się między dwoma prostymi; • są to dwie proste <i>złączone na ukos</i>, które tworzą kąć; • kąć tworzą np. prostopadłe <i>ułożone linie</i> (90°) lub o mniejszym <i>odstępie</i> (uczeń narysował dodatkowo kąć prosty i ostry); • to dwie <i>linie</i> leżące do siebie prostopadłe; kąć mierzymy w stopniach; • to <i>stopień pochyleń /nachyleń/</i> dwóch prostych; • to ilość stopni pomiędzy dwoma stykającymi się krawędziami; • to <i>miejsce</i>, w którym łączą się dwie <i>linie</i>; • to <i>miejsce</i>, gdzie stykają się 2 odcinki; może być prosty, ostry, wklęsły, wypukły i inne; • to złączenie dwóch <i>kresek</i> pod <i>ilomaś</i> stopniami; • <i>łuk</i>, pod którym <i>załamują się 2 linie</i>;
9.	Pojęcie odnoszące się do przestrzeni	<ul style="list-style-type: none"> • kąć w pomieszczeniu (układ ścian); • jest to złączenie dwóch ścian. Kąć ma np. 30°; • kąć jest to złożenie poziomo dwóch ścian; • składa się z dwóch ścian i ma 90°; • kąć jest to złożenie poziomo dwóch ścian; • kąć ma dwie ściany; • jest między ścianami. Można się w nim schować; • w klasie są kąty; • kąć płaski to kąć który nie jest trójwymiarowy jest tylko płaski;

10.	Zdefiniowanie kąta przez jego narysowanie	Uczeń narysował: <ul style="list-style-type: none"> • kąt prosty i rozwarty; • kąt prosty; • kąt ostry. • Kąt jest to (tu rysunek kąta – ostry (2 osoby), rozwarty (1 osoba))
11.	Brak odpowiedzi	<ul style="list-style-type: none"> • 7 osób

Uwaga: kursywą wyróżniono zwroty i pojęcia matematyczne używane przez uczniów niepoprawnie (w niewłaściwym kontekście) lub językiem potocznym.

ANALIZA WYPOWIEDZI UCZNIÓW:

W badaniu udział wzięło 120 uczniów. Niektóre wypowiedzi uczniów dotyczą kilku kategorii:

- W wypowiedziach uczniów nie ma ani jednej odpowiedzi modelowej. Wiele wypowiedzi jest poprawnych lecz niekompletnych. Dotyczą one bądź rodzajów kątów, bądź elementów składowych kąta lecz nie zawierają wszystkich elementów zawartych w definicji modelowej.
- Tylko jedna odpowiedź jest najbardziej zbliżona do „wzorca”, chociaż nie odpowiada na pytanie „Co to jest kąt?” / „Co nazywamy kątem?”, a jedynie „Z czego składa się kąt?” – „*Kąt składa się z dwóch ramion i wierzchołka i może mieć od $0 - 180^0$.*”
- Na uwagę zasługuje fakt, że uczennica poprawnie nazwała elementy składowe kąta, niestety miarę kąta ograniczyła do 180^0 .
- Dość znaczna grupa uczniów (32 ucz.), która wypowiedziała się poprawnie na temat kąta (płaskiego), skupiła się na częściach składowych kąta, a nie na sformułowaniu definicji kąta: „składa się z dwóch prostych (*linii*) przecinających się i może mieć od $0 - 360^0$ ” lub „składa się z dwóch ramion i wierzchołka”.
- Nie wszyscy uczniowie poprawnie operują tu też pojęciami matematycznymi dotyczącymi figur geometrycznych:
 - zamiast *prosta* – stosują zwrot *linia*;
 - zamiast *wierzchołek* – stosują zwrot *końcówka*, *czubek*, *róg*, *punkt*;
 - zamiast *półpłaszczyzna* – stosują zwrot *miejsce między dwoma liniami*.

Mimo, że opis pojęcia „kąt” jest w miarę dokładny (choć nie idealny), to wyraźnie nawiązuje do pojęć potocznych, natural-

nych, a nie naukowych. Uczniowie nie stosują definicji kąta, jedynie na podstawie własnych doświadczeń „wyobrazili” sobie to pojęcie i opisali je. Posłużyli się tu językiem obrazowym – opis swojego wyobrażenia o „kącie”, np. „dwie proste złączone na ukos, które tworzą kąt”.

- Kolejną liczną grupę (22 ucz.) stanowią uczniowie, którzy poprawnie kojarzą kąt jako „pojęcie matematyczne”, a nawet „geometryczne” i wiedzą, że występuje w „figurze”. Podają też dodatkowe pojęcia związane z kątem, np. „miara”, „rodzaj”, itp., ale nie podają definicji kąta i nie wszystkie pojęcia, których używają stosują poprawnie, np.:

- *róg* – zamiast *kąt*;
- *wyrażenie matematyczne* – zamiast *figura geometryczna*;
- *kształt niedokończonego trójkąta* – jako *obrazowy opis kąta*;
- *kąt jako „czubek” figury*;
- *„odstęp” jako miara kąta w stopniach*.

- Podobnie liczną grupę (19 ucz.) stanowią uczniowie, którzy opisują kąt posługując się pojęciami związanymi z jego rodzajem, np. „kąt wklęsły”, „wypukły”, „prosty”, „ostry”, itp.

Ten opis również świadczy o tym, że uczniowie opisują swoje wyobrażenie „pojęcia”. Nie potrafią sprecyzować definicji. Kilko uczniów wykonało nawet rysunki.

Nie wszystkie pojęcia są tu też poprawnie używane, np.:

- *wierzchołek wklęsły*,
- *rozdzielamy zamiast dzielimy*,
- *zrobiony zamiast skonstruowany*,
- *kąty prostopadłe zamiast proste prostopadłe lub zamiast kąt prosty*,
- *odcinek, który mierzy się w stopniach*.

Oznacza to, że uczniowie znają pojęcia matematyczne, ale nie stosują ich poprawnie.

- Niektórzy uczniowie skupili się na sposobie pomiaru za pomocą „kątomierza” (13 ucz.) oraz nawiązali do pojęcia potocznego – „kara” (6 ucz.).
- Dziesięciu uczniów, udzielając odpowiedzi na pytanie, wyobrazilo sobie „kąt pomiędzy dwiema płaszczyznami” i odpowiedziało m.in., że „kąt składa się z dwóch ścian”.

- Jeszcze inni opisali pojęcie „kąta” jako pojęcie ekonomiczne. Przyczyną takiego błędnego „skojarzenia” mógł być fakt postawienia uczniom pytania na dwa sposoby:
 - „Co to jest kąt?”
 - „Co nazywamy kątem?”
 Drugi sposób sformułowania pytania przez nauczyciela mógł spowodować błędne „skojarzenie” fonetyczne „*kątem*” z kontem bankowym.
- Wystąpiła też grupa uczniów, która nie udzieliła żadnej odpowiedzi (7 ucz.).

Należy tu jeszcze nadmienić, że znaczna część uczniów wymieniła po kilka skojarzeń, np. kąt jako *pojęcie matematyczne*, jako *pojęcie ekonomiczne* czy jako *kara* i dodatkowo wykonała jeszcze *rysunek kąta*.

Wnioski

Mimo, że w badaniu wyróżniono wiele grup, według których poklasyfikowano odpowiedzi uczniów stosując pewne kryterium podobieństwa, to jednak cechą wspólną wszystkich tych odpowiedzi jest fakt, że:

- *żaden* z uczniów *nie udzielił odpowiedzi modelowej*;
- *żaden* z uczniów *nie próbował sprecyzować definicji*, a raczej opisywał „model”, którym był kąt;
- pomimo, że w podstawie programowej z matematyki w szkole podstawowej występują takie treści nauczania, jak: prosta, półprosta, proste prostopadłe, *kąt*, *porównywanie kątów*, *mierzenie kątów*, *kąty wierzchołkowe*, *kąty przyległe*, *suma kątów w trójkącie*, a w osiągnięciach: *mierzenie i obliczanie długości, kąta*, to *uczniowie nie przyswoili poprawnie pojęć dotyczących kątów*;
- System pojęć *charakterystyczny dla matematyki nie wyparł* z umysłu uczniów obrazu świata ukształtowanego w toku *osobistych doświadczeń*.
- Uzyskane wyniki wskazują jednoznacznie, że *dotychczasowy sposób nauczania nie skutkował rozumieniem* przez uczniów pojęcia kąta lecz tylko krótkotrwałym przyswojeniem jego definicji, która ponadto wymieszała się z jego potocznym rozumieniem.
- Obserwujemy również, że *uczniowie wiedzą więcej* na temat pojęcia kąta ze względu na ich miarę *niż* na temat samego pojęcia

kąta. To również niesie pewną informację zwrotną dla nas nauczycieli. *Uczniowie wiedzą jak dzielić, ale nie rozumieją tak naprawdę, co dzielą.*

Nie można konkretnie odpowiedzieć, co jest przyczyną wyżej zaistniałej sytuacji. Może to wynikać z faktu, że:

- *uczeń nie przyswaja* pojęć niejako *automatycznie* w gotowej postaci, lecz z dużym nakładem wysiłku i aktywności intelektualnej;
- pojęcia naukowe rozwijają się przy pewnym osiągniętym poziomie *pojęć potocznych*, a być może *uczniowie nie mieli* zbyt *bogatego zasobu* „takowych” po pierwszym etapie edukacyjnym;
- *nie wystąpiło odpowiednie nauczanie*, nauczyciel nie stosował właściwych form i metod pracy z uczniami, nie dawał swoim uczniom „swobody skierowanej na celową aktywność uczniów, tj. nastawioną na wykonanie zadania, a nie na „samowolę” ucznia”.
- *uczniowie nie potrafią się uczyć* po przejściu z I na II i kolejno III etap edukacyjny;
- *nie są wdrażani* przez swoich rodziców *do systematyczności i obowiązkowości*;
- *nauczyciele*, a zwłaszcza młodzi nauczyciele, *są mało elastyczni i nie potrafią zmieniać założonych* przed lekcją *celów*, nawet, gdy zachodzi taka potrzeba.

Uwagi metodyczne

Na wstępie nasuwa się pytanie: „Dlaczego zmieniono „Podstawę programową...” (Rozporządzenie MEN z 23. sierpnia 2007 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół – Dz.U. z 2007r. Nr 157, poz. 1100), skoro przeprowadzone badanie wykazało, że decyzja usunięcia z Podstawy programowej gimnazjum treści dotyczących kątów była bezzasadna?”

Przeprowadzone badanie wykazało, że przy omawianiu w gimnazjum treści dotyczących kątów należy *bezwzględnie omówić i utrwalić definicję kąta (płaskiego)* oraz wykorzystując „obraz świata ucznia”

- przy omawianiu treści „proste równoległe przecięte trzecią prostą”:
 - omówić rodzaje kątów: 1.ostre, proste, rozwarte, półpełne, pełne; 2. wklęsłe, wypukłe; 3. wierzchołkowe, przyległe; 4. odpowiadające, naprzemianległe, itp.

- zwracać uwagę na język naukowy ucznia w precyzowaniu pojęć matematycznych: prosta, wierzchołek, ramię kąta, itp.;
- zwracać uwagę uczniów na fakt, że „każda z dwóch części płaszczyzny jest kątem”;
- przy omawianiu treści „prosta styczna, pole koła, twierdzenie Pitagorasa, cechy przystawania i podobieństwa trójkątów, okrąg opisany na trójkącie i wpisany w trójkąt”:
 - wykorzystać wiedzę uczniów dot. mierzenia kątomierzem, pojęć związanych z kątami w trójkątach, czworokątach i innych figurach geometrycznych;
- przy treściach dotyczących brył geometrycznych wykorzystujemy wiedzę potoczną uczniów dotyczącą kątów w mieszkaniu – *kąt dwuścienny*;
 - uzmysłwić uczniom różnicę pomiędzy kątem na płaszczyźnie i w przestrzeni;
 - zwrócić uwagę na różne miary kątów dwuściennych (nie tylko 90^0 jak w mieszkaniu);
 - poprzez analogię do „obrazu świata ucznia” – kąt w mieszkaniu nazwać elementy składowe kąta dwuściennego z zastosowaniem języka naukowego;
- zwrócić uwagę ucznia na różnicę pojęć naukowych: „*kąt i konto*”.