Weronika Jaśkiewicz,
Anna Jaśkiewicz-Baumann

Ujawnianie specyficznych sposobów reagowania uczniów w rozwiązywaniu zadań prowadzących do realizacji wymagań perspektywicznych na III etapie edukacji matematycznej

Streszczenie

Artykuł zawiera oczywisty sposób konkretyzacji (lub interpretacji) fragmentów teorii matematycznej (definicji, twierdzeń) na III etapie edukacji matematycznej. Materiał nauczania stanowi zadanie i jego przedłużenie poprzez stawianie dodatkowych pytań nie naruszających struktury zadania wyjściowego.

Uwagi wstępne

W związku ze standaryzacją nauczania i kontrolowania pojawiły się obawy, że uczniowie zainteresowani matematyką szczególnie na II i III etapie edukacji matematycznej są zrównywani z tak zwanym poziomem „średnim". Na tym etapie edukacji nauczanie jak i kontrolowanie nie wychodzi poza poziom podstawowy. Nie ma wyraźnych sugestii w programach nauczania matematyki, ani w podręcznikach szkolnych, a tym bardziej w standardach wymagań egzaminacyjnych do różnicowania wymagań stawianych uczniom. Szczególnie standardy egzaminacyjne są wyznacznikiem dla wielu nauczycieli matematyki w organizowaniu poziomu nauczania i kontrolowania, co negatywnie wpływa na osiągnięcia uczniów.

R. Pawlak (2003) mówiąc o aspektach „Matury 2005" powiedział, że jest zamysł, aby tzw. standard 2b poszerzyć o następujące umiejętności: interpretację definicji i twierdzeń. Stwierdzenie to dotyczy IV etapu edukacji matematycznej, gdzie uznaje się w kształceniu matematycznym dwa poziomy: podstawowy i rozszerzony.

Niektóre teoretyczne opracowania kształcenia standardowego uwzględniają różnice poziomowe w nauczaniu i kontrolowaniu, np. W. Jaśkiewicz (1993). Tego rodzaju opracowania nie stanowią jednak podstawy do różnicowania wymagań.

Według Z. Krygowskiej (cz. III, s.80) uczeń aktywnie uczestniczący w konstruowaniu matematycznego pojęcia i formułowaniu definicji czy też odkrywaniu twierdzenia uczy się prawidłowego abstrahowania i schematyzowania, uogólniania i specyfikacji; dyscypliny wypowiedzi formalizującej jego doświadczenia, intuicje i myślowe konstrukcje w określonym z góry precyzyjnym języku.

Tak określone umiejętności myślowe ucznia prowadzące do realizacji wymagań perspektywicznych będziemy nazywać specyficznymi sposobami jego reagowania w rozwiązywaniu zadań.

W naszych rozważaniach materiał nauczania będą stanowić: sytuacje, zadania problemowe oraz formułowane (poprzez stawianie dodatkowych pytań) na ich podstawie zadania nie naruszające struktury zadań wyjściowych.

I. Rys historyczny standardu szkolnego matematycznego kształcenia

Tendencja do wyodrębniania standardu matematycznego kształcenia była wyraźnie widoczna w historii rozwoju ruchu reformatorskiego szkoły. Poczynając od lat sześćdziesiątych jednym z centralnych zagadnień modernizacji szkoły było określenie takich treści kształcenia w zakresie matematyki, które odpowiadałyby społecznym zapotrzebowaniom oraz współczesnemu etapowi rozwoju nauk matematycznych. Głównym przy tym punktem orientacyjnym było podniesienie poziomu wykształcenia ludności jako niezbędnego warunku dokonania rewolucji naukowo-technicznej.

W latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych w większości krajów obok pogłębiającej się dyferencjacji nauczania zarówno pod względem treści, jak i formy zauważa się tendencję do unifikacji wymagań odnoszących się do wyników nauczania, oraz rozwój prac nad naukowo-teoretycznymi podstawami określenia jednolitego poziomu kształcenia. Prowadzone są badania skierowane na ustalenie wymagań dotyczących końcowych zasobów wiedzy i umiejętności uczniów, które odpowiadałyby zarówno potrzebom poszczególnej osobowości, jak i całego społeczeństwa, zachowując współczesny poziom rozwoju nauki, zapewniając możliwość dalszego kształcenia się w szkole zawodowej lub akademickiej. W pewnym sensie w ten sposób sformułowane wymagania określają również treść kształcenia, pozostawiając pełną swobodę wyboru środków nauczania (w tym również podręcznika) oraz kolejność opracowania materiału.

Według W. Jaśkiewicz (1993) wymagania dotyczące przygotowania matematycznego zazwyczaj reprezentowane są w postaci wyliczenia podstawowych wiadomości i umiejętności, które uczeń powinien opanować na każdym stopniu nauczania. Najczęściej spotykaną formą konkretyzacji tych wymagań jest opis wyników nauczania w postaci systemu zadań stosowany, np. w Federacji Rosyjskiej. W jej rozumieniu system wymagań, jako główny komponent mechanizmu zwrotnej więzi w nauczaniu jest podzielony na dwa bloki: wymagania przewidziane w trakcie kontroli wiadomości i kontroli umiejętności. System ten realizuje więc dwa cele: z jednej strony służy jako podstawowy punkt orientacyjny dla konstruowania zadań sprawdzających (kontrolnych), przez co właśnie określa jednolity poziom kontroli lub podstawowy poziom wyników nauczania, z drugiej zaś strony – wskazuje perspektywy w nauczaniu, przewidując możliwość wyjścia poza ramy podstaw obowiązujących tak w zakresie nomenklatury wprowadzanych zagadnień, jak i w zakresie poziomu opanowania materiału. Inaczej mówiąc, system wymagań standardu ustala wobec uczniów podstawowy i maksymalny poziom wymagań.

Takie podejście daje pozioma dyferencjacja w nauczaniu matematyki. Przewiduje ona taką organizację nauczania, która stwarza możliwość uczącym się według tego samego programu opanować go na różnych poziomach, odpowiadających ich indywidualnym zdolnościom, zapewniając osiągnięcie określonej, obowiązkowej podstawy programowej.

Oto wypowiedź L.W. Kuźniecowej (1989) uzasadniająca powyżej opisane podejście do nauczania matematyki: „... w tym celu, aby każdy uczeń miał możliwość realizowania swych zdolności, [...] nie należy utożsamiać poziomu, według którego realizuje się nauczanie, z obowiązkowym poziomem opanowania materiału. Pierwszy z nich powinien być znacznie wyższy, w przeciwnym bowiem przypadku poziom przygotowania obowiązkowego nie będzie osiągnięty, a także uczniowie potencjalnie mogący opanować więcej materiału – będą straceni. Każdy uczeń powinien w pełnym zakresie usłyszeć przewidywany materiał oraz na pewnych etapach uczestniczyć w rozwiązywaniu bardziej skomplikowanych zadań”.

Kontrola powinna przewidywać dla wszystkich uczniów sprawdzenie osiągnięć w zakresie obowiązkowych wyników nauczania (jako sprawdzenie wykonania wymagań podstawowych) oraz powinna być dopełniona, sprawdzeniem opanowania materiału na wyższym poziomie.

Koncepcja poziomów dyferencjacji zorientowana jest zatem na takie podejście do określenia końcowych wymagań, które pozwala ustalić górne i dolne granice, w zakresie których zarówno nauczyciel, jak i poszczególni uczniowie mogą wybrać najbardziej odpowiedni dla nich poziom uczenia się i „rozliczania się” z opanowania materiału.

Górny poziom określa te perspektywy, które otwierają się przed uczniami sumiennymi i wykazującymi zainteresowanie nauką. Poziom ten powinien służyć jako punkt orientacyjny dla nauczyciela przy wprowadzaniu materiału na lekcji, przy opracowaniu szkolnych podręczników, przy przygotowaniu poradników metodycznych – lecz jako pożądany, całkowicie odpowiadający przewidzianym celom matematycznego kształcenia.

Z tego punktu widzenia (W. Jaśkiewicz, 1993) wydzieliła następujące bloki wymagań:

1. wymagania podstawowe, charakteryzujące podstawowy poziom opanowania materiału (poziom kontroli wiedzy),
2. wymagania perspektywiczne, określające jednolity poziom naukowych zadań (poziom nauczania).

A zatem, przez standard matematycznego kształcenia należy rozumieć dwupoziomową strukturę, składającą się z takich komponentów, jak podstawowe wymagania, wymagania perspektywiczne, podstawowe treści oraz materiał pomocniczy i uzupełniający. Ważnymi elementami tej struktury są również związki między wymienionymi komponentami.

Struktura taka pozwala „wkomponować” do standardu nie tylko mechanizm kontroli czy sprawdzenia osiągnięć obowiązkowych rezultatów nauczania uczniów (co właśnie przewiduje się w innych modelach standardu) lecz również co jest szczególnie ważne, mechanizm organizacji procesu nauczania, skierowanego na osiąganie obowiązkowego oraz nieco wyższego poziomu przygotowania matematycznego. Wydaje się, że brak tego ostatniego elementu w opracowanych modelach standardu jest jedną z głównych przyczyn wątpliwości pedagogów praktyków co do efektywności stosowanych metod.

II. Konstruowanie i definiowanie pojęć poprzez rozwiązywanie zadań

Różne metody prowadzą do konstruowania i definiowania przez samych uczniów nowych pojęć i odkrywania przez nich nowych twierdzeń. Z. Krygowska (cz. III, s.79) wyróżnia dwa zasadnicze sposoby wprowadzania nowego pojęcia:1) poprzez definicję podaną przez nauczyciela lub podręcznik, zilustrowaną odpowiednimi przykładami; 2) poprzez taką organizację aktywności ucznia, że on sam to pojęcie przy dyskretnej pomocy nauczyciela konstruuje i następnie definiuje. Oba te sposoby są równie ważne, dla rozwoju matematycznego myślenia ucznia.

Wybór sposobu zależy między innymi od charakteru samego pojęcia, stopnia jego abstrakcyjności, od poziomu zespołu klasowego, posiadanych umiejętności w zakresie matematyki szkolnej a także doświadczeń związanych z umiejętnym wyzwalaniem przez nauczyciela aktywności ucznia i jego sposobów reagowania.

Drugi ze sposobów sformułowanych przez Z. Krygowską uważamy za bardzo ważny w orientowaniu aktywności ucznia na czynne uczestniczenie w konstrukcji nowego dla niego pojęcia (fragmentu teorii matematycznej). W ten sposób rozwijamy takie umiejętności jego myśli, które wykraczają poza ramy określone w podstawach programowych i odpowiadają wymaganiom perspektywicznym.

Według Z. Krygowskiej rozwój takich umiejętności w okresie nauki szkolnej jest ważny dla tych uczniów, którzy z matematyką będą mieli w przyszłości mniej do czynienia, jak i dla tych, którzy matematykę będą studiować.

III. Przykładowe fragmenty lekcji realizujące wymagania perspektywiczne i poszerzające wiadomości podstawowe

Poniżej przytaczamy fragment lekcji zainspirowany zadaniem 3/158 o fikcyjno praktycznej treści zaczerpniętym z podręcznika do matematyki klasy I gimnazjum „Krok po kroku" realizujący według nas wymagania perspektywiczne i wprowadzający ucznia w zagadnienia uczenia się teorii poprzez rozwiązywanie zadań.

Zadanie. Pani Eulalia wygrała na loterii fantowej 8x m siatki. Chce kupić działkę, którą mogłaby ogrodzić tą siatką. Jaką powierzchnię może mieć ta działka, jeżeli x jest liczbą naturalną i pani Eulalia pragnie, aby wymiary działki też się wyrażały liczbami naturalnymi?

Konstruktorzy zadania pytają: Jaką powierzchnię może mieć działka? Są dopuszczalne według nas różne odpowiedzi: małą, dużą, 7 m^2, 12 m^2, 15 m^2, 16 m^2 (oczywiście dla ustalonego obwodu równego 16 m). Jak wynika z powyższego zapisu pól, pole działki o kształcie prostokątnym zwiększa się wraz ze zbliżaniem się jej kształtu do działki kwadratowej, która ma z nich największe pole. Wiadomo, że wśród wszystkich czworokątów izoperymetrycznych największe pole ma kwadrat.

W zadaniu nie mówi się o kształcie działki (zakłada się tylko, że x jest liczbą naturalną i wymiary działki wyrażają się liczbami naturalnymi) i dlatego na postawione w zadaniu pytanie można odpowiedzieć: prostokątną, kwadratową, trójkątną, czworokątną itp. W związku z tym można postawić pytanie: Czy działka jaką chce kupić pani Eulalia musi być prostokątna (kwadratowa)? Możemy tak pokierować dyskusją, żeby uczniowie postawili pytanie: Czy możemy dobrać tak długości boków, np. trójkąta, żeby były liczbami naturalnymi i miały ustalony (warunkiem 8x ($x \in N$)) obwód. Ponieważ w trójkącie wymiarami są podstawa i odpowiadająca jej wysokość przyjmujemy również, że odpowiednia wysokość trójkąta wyraża się także liczbą naturalną. Oczywiście nie trudno będzie uczniom przy pomocy nauczyciela znaleźć trójkąt o bokach (6, 5, 5)m o obwodzie równym 16m i trójkąt o bokach (8, 5, 5)m o obwodzie równym 18m. Wysokość trójkąta o bokach (6, 5, 5)m z twier. Pitagorasa równa się: $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4m$, jego pole 12m^2. Wysokość trójkąta o bokach (8, 5, 5)m z twier. Pitagorasa równa się: $\sqrt{5^2-4^2}=3m$, jego pole równe jest $12m^2$ (inne wysokości nie są liczbami naturalnymi i obliczenia komplikują się).

Z obliczeń powyższych wynika, że ich pola są równe i wynoszą po 12 m^2. Wiadomo, że spośród wszystkich trójkątów o jednakowym polu trójkąt równoboczny ma najmniejszy obwód. Na tej podstawie możemy wnioskować, że trójkąt o bokach (6, 5, 5)m jest kształtem bardziej zbliżony do trójkąta równobocznego niż trójkąt o bokach (8, 5, 5)m i dlatego ma mniejszy obwód.

Kształt trójkąta równoramiennego o stałym polu zależy od związku między podstawą i odpowiadającą jej wysokością. Jeżeli $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ to trójkąt jest równoboczny (i ma najmniejszy obwód). Jeżeli $h>\frac{a\sqrt{3}}{2}$ to trójkąt zmienia kształt z równobocznego na równoramienny i jego obwód zwiększa się. W przypadku $h<\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trójkąt zmienia znów kształt z równobocznego na równoramienny i jest „spłaszczony” w stosunku do trójkąta, w którym $h\geq\frac{a\sqrt{3}}{2}$, zaś jego obwód jest również większy od obwodu trójkąta równobocznego.

Można łatwo uzasadnić, że w rozważanej (w zadaniu) klasie trójkątów równoramiennych o polu równym 12, nie istnieje trójkąt równoboczny. Na lekcji matematyki możemy liczyć na pełne zaangażowanie się uczniów w to zagadnienie, jeśli będziemy budować konkretne trójkąty równoramienne o polu równym 12, wykonywać odpowiednie obliczenia i porównywać otrzymane rezultaty.

I dalej można postawić uczniom następujące polecenie: Sprawdź! Dla jakich obwodów 8x (x$\in N$) można znaleźć trójkąty o bokach odpowiednio proporcjonalnych do boków trójkąta (6, 5, 5)m i zapisz to odpowiednim wzorem.

W klasie II gimnazjum po przerobieniu wiadomości o potęgach o wykładniku całkowitym, opierając się na analizie konkretnych przykładów (tabela 1) można wyprowadzić ogólny wzór na długość obwodu trójkąta o bokach odpowiednio proporcjonalnych do boków trójkąta (6, 5, 5)m spełniający warunek 8x (x$\in N$).

Tabela 1

Obwód trójkąta równoramiennego (w metrach)	Obwód trójkąta równoramiennego jako iloczynu potęgi 2^k i liczby 8	Podstawa trójkąta równoramiennego i odpowiadająca jej wysokość	Pole trójkąta równoramiennego (w metrach kwadratowych)	Pole trójkąta równoramiennego jako iloczynu potęgi 2^{2k} i liczby 3
*)3+2,5+2,5=8 6+5+5=16 12+10+10=32 24+20+20=64 48+40+40=128	$2^0\cdot 8=8$ $2^1\cdot 8=16$ $2^2\cdot 8=32$ $2^3\cdot 8=64$	a=3, h=2 a=6, h=4 a=12, h=16 a=24, h=16 a=48, h=32	3 12 48 192 768	$2^0\cdot 3$, k=0 $2^2\cdot 3$ $2^4\cdot 3$ $2^6\cdot 3$

96+80+80=256 192+160+160=512	$2^4 \cdot 8 = 128$ $2^5 \cdot 8 = 256$ $2^6 \cdot 8 = 512$ $2^k \cdot 8$, k=1,2...	a=96, h=64 a=192, h=1278	3072 12288	$2^8 \cdot 3$ $2^{10} \cdot 3$ $2^{12} \cdot 3$ $2^{2k} \cdot 3$, k=1,2

Uczniowie zauważają, że w tej grupie trójkątów obwód zwiększa się 2^k-krotnie, dla k=1,2,3..., a pole 2^{2k}, dla k=1,2,3... Najmniejsze pole wynosi 12m^2, przy obwodzie równym 16m.

Można postawić również pytanie do przykładu oznaczonego gwiazdką(tabela1): Czy istnieje trójkąt równoramienny spełniający warunki określone w zadaniu, którego obwód wynosi 8m. Jeśli przyjmiemy, że wymiarami trójkąta są podstawa i odpowiadająca jej wysokość(a=3, h=2), to przykład ten spełnia warunki zadania. Przykład ten nie spełnia naszych założeń: boki figury nie wyrażają się liczbami naturalnymi.

Można dyskutować także nad przydatnością odpowiedniej wielkości działek w rzeczywistości, np. działka o polu równym 768m^2 i 3072m^2 może być wykorzystana pod budowę domu, jeśli spełnia inne warunki budowlane.

W klasie trzeciej gimnazjum uczniowie poznają działania w zbiorze liczb rzeczywistych. Wyznaczają przybliżenia dziesiętne liczb niewymiernych oraz szacują wyniki działań na liczbach wymiernych i niewymiernych. Posiadają pewne doświadczenie w stawianiu hipotez i ich weryfikacji. Powróćmy do tego, że w zadaniu nie mówi się o kształcie działki i spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, czy działka w kształcie okręgu (koła) może spełniać warunki zadania (obwód działki wynosi 8x i x$\in N$, wymiary działki wyrażają się liczbami naturalnymi).

Wzór na długość okręgu ($2\pi r$) i wzór na pole koła (πr^2) posiadają jeden wymiar r. Do rozważań i wnioskowania przyjmujemy $\pi = \frac{22}{7}$ (mamy teraz inne zadanie liczbę niewymierną π zastępujemy wymierną $\frac{22}{7}$) stąd długość okręgu wynosi $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r$. Obwód działki pani Eulalii jest równy 8x (x$\in N$). Równanie ma postać: $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r = 8x$, podstawiając za r wielokrotność liczby 7 mamy:

$1 \cdot 7 = 7$
$2 \cdot 7 = 14$
$3 \cdot 7 = 21$
$4 \cdot 7 = 28$
$5 \cdot 7 = 35$
$6 \cdot 7 = 42$
$7 \cdot 7 = 49$

$20 \cdot 7 = 140$

Na podstawie otrzymanych danych budujemy tabelę 2.

Tabela 2

Promień okręgu (koła)	Długość okręgu	Spełnia warunek zadania lub nie
7	$2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7 = 44$	44=8x$\Rightarrow$x=5,5 (nie)
14	$2\cdot\frac{22}{7}\cdot 2\cdot 7 = 88$	88=8x$\Rightarrow$x=11 (spełnia)
21	$2\cdot\frac{22}{7}\cdot 3\cdot 7 = 132$	132=8x$\Rightarrow$x=16,5 (nie)
28	$2\cdot\frac{22}{7}\cdot 4\cdot 7 = 176$	176=8x$\Rightarrow$x=22 (spełnia)
-------	--------	-------
140	$2\cdot\frac{22}{7}\cdot 20\cdot 7 = 880$	880=8x$\Rightarrow$x=110 (spełnia)

Stwierdzamy, że dla r będącego liczbą parzystą $k\cdot 7$, k=2, 4, 6... obwód działki w kształcie okręgu (koła) spełnia warunki zadania

W zadaniu pytają, jaką powierzchnię może mięć ta działka? Pole powierzchni koła: πr^2 dla r=$k\cdot 7$, k=2,4,6… przyjmuje następujące wartości:

r=7, πr^2=154m^2
r=14, πr^2=614m^2
r=21, πr^2=1386m^2
r=28, πr^2=2464m^2
----
r=140, πr^2=61600m^2

Działka w kształcie koła może mieć, np. 614m^2, 2464m, 61600m^2 itd., ponieważ dla tych obliczonych pól x jest liczba naturalną.

Przy działce w kształcie koła kłopotliwa jest sprawa z liczbą π. Za π nie możemy podstawić $\frac{22}{7}$, bo w rzeczywistości długość okręgu (pole koła) będzie zawsze mniejsza od obliczonej.

Spróbujmy aby uczniowie zweryfikowali ten tekst. Ustosunkowali się do podstawienia za π liczby $\frac{22}{7}$.

Zadanie posłużyło nam do przeprowadzenia teoretycznych rozważań na poziomie III edukacji szkolnej:

– o współzależności boków trójkąta,
– o zależności obwodu i pola trójkąta od wymiarów jego boków,
– o proporcjonalności boków trójkątów podobnych,
– o warunkach koniecznych dla istnienia prostokąta z danym wymiarem boków.

Uczniowie rozwiązując zadanie aktywnie odkrywają fragmenty teorii matematycznej (twierdzenia) lub je wykorzystują, uogólniają wzory. Wdrażają się do uważnego czytania treści zadania, wyjaśniania terminów matematycznych i poza matematycznych, analizowania relacji zachodzących między wielkościami matematycznymi i ich systematyzacji, stawiania pytań, modyfikacji sytuacji problemowej.

Zakończenie

Należy organizować nauczanie tak, ażeby każdy uczeń na każdym poziomie mógł zdobyć chociażby podstawową wiedzę i umiejętności. To wcale nie oznacza, że nauczyciel w procesie nauczania dąży do osiągnięcia tylko tych podstaw: żeby osiągnąć co najmniej poziom podstawowy, trzeba przekazać uczniom obszerniejszy zakres wiedzy i umiejętności.

Na każdej lekcji powinno się przeznaczać specjalny czas na opracowanie wiadomości i umiejętności w zakresie obowiązującego poziomu i czas na poszerzenie tych wiadomości poprzez stosowanie zróżnicowanego i indywidualnego podejścia w nauczaniu matematyki.

Należy organizować nauczanie w taki sposób, aby móc wyzwalać i rozwijać specyficzne aktywności u uczących się prowadzące do rozwijania potencjalnych uzdolnień matematycznych uczniów. Przytoczone powyżej przykłady wskazują, że jest to możliwe.

Bibliografia

Janowicz J., *Standardy kształcenia uczniów zdolnych*, Matematyka 1/2005.

Jaśkiewicz W., *Teoretyczne podstawy określenia standardu matematycznego kształcenia w szkole podstawowej w Polsce*, WSP Kielce 1993.

Jędrzejewski J., Gałązka K., Lesiak E., *Matematyka „Krok po kroku", Podręcznik dla klasy pierwszej gimnazjum*, WE Res Polona sp. z o.o., Łódź, Nr dopuszczenia: 180/99.

Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP Warszawa 1977.

Standardy wymagań egzaminacyjnych (red. Centralna Komisja Egzaminacyjna), WMEN Warszawa 1999.