Między konkretem a abstrakcją

Małgorzata Reszke

Nauka rachunków i matematyki ma rozwijać i zachęcać,
tak, aby uczniowie nie bali się tego przedmiotu,
mieli do niego pozytywny stosunek i byli „gotowi do działania”.[1]

Matematyczne cele edukacyjne II etapu kształcenia zapisane w *Podstawie programowej* ujęte są w trzy punkty rozpoczynające się słowem **rozwijanie**. Nie od rzeczy będzie więc zauważyć, że podstawowym warunkiem osiągnięcia tak sformułowanych celów kształcenia jest przyjmowanie przez uczącego się czynnej postawy wobec stawianych przed nim zadań.

Spostrzeżenia nauczycieli I etapu kształcenia:

- *dzieci lubią matematykę,*
- *dzieci wyraźnie faworyzują zajęcia oparte na treściach przyrodniczych i matematycznych,*
- *dzieci wolą matematykę, bo jej nauczanie oparte jest o konkret,*
- *dzieci wolą matematykę od języka polskiego, bo efektem ich działań pozostaje konkret.*

W oparciu o spostrzeżenia nauczycieli I etapu kształcenia wydawałoby się, że dalsza nauka matematyki jest, zarówno dla ucznia jak i nauczyciela, z góry **skazana na sukces**. Nauczyciel matematyki w II etapie kształcenia ma bardzo dobrą pozycję wyjściową – jest postrzegany jako osoba, która proponuje atrakcyjne zajęcia. Od swoich nowych uczniów zazwyczaj oczekuje zainteresowania proponowanymi treściami kształcenia, zabierania głosu na zajęciach, dostrzegania zależności i regularności, formułowania wniosków... . Krótko mówiąc, oczekuje że uczniowi będzie chciało się uczyć a wzrost jego umiejętności matematycznych będzie systematyczny.

Jednym z mocno akcentowanych, uznanych za podstawowe, osiągnięć ucznia na każdym etapie kształcenia jest uzyskanie sprawności rachunkowej. W *Podstawie programowej* wymieniona jest ona, być może przypadkowo, na pierwszym miejscu.

Wyniki badań umiejętności rachunkowych przeprowadzonych wśród uczniów klas IV-VI w pierwszym tygodniu nauki:[2]

wyniki	*klasa 4*	*klasa 5*	*klasa 6*
bardzo dobre i dobre	*41*	*25*	*3*
sugerujące duże trudności w przyswajaniu algorytmów rachunkowych	*12*	*30*	*63*

[1] H. Broekman i in.; *Zmieniający się obraz matematyki dla młodzieży szkolnej w wieku 10-16 lat*; CODN, Warszawa 1995; str. 66.

[2] Badanie umiejętności rachunkowych uczniów klas IV-VI obejmowało sprawdzenie umiejętności obliczania wartości jednodziałaniowych wyrażeń arytmetycznych. W klasach czwartych i piątych ograniczało się do rachunku na liczbach naturalnych (z sugestią ich wykonywania sposobem pisemnym), w klasach szóstych dotyczyło ułamków.

Spostrzeżenia i wnioski (fragment):

W dostępny im sposób – rachowali pamięciowo i pisemnie, czasami wspierając się liczeniem na palcach lub ilustrowaniem działań w przypadku mnożenia i dzielenia.

Wyniki przeprowadzonych badań w jednej ze szkół podstawowych wskazują na sytuację, delikatnie ujmując, odmienną od założonej. Nauczyciele prowadzili zajęcia zgodnie z zaleceniami autorów programu nauczania matematyki w przewodnikach metodycznych, czyli również stosowali metody aktywizujące ucznia.

W trakcie zajęć poświęconych ćwiczeniu umiejętności rachunkowych, stosowaniu algorytmów przy wykonywaniu rachunków, stosowane były karty pracy bazujące na malowankach i krzyżówkach, loteryjki, domino, praca w grupach i indywidualna.

Dlaczego więc, mimo stosowania aktywizujących form pracy, uczniowie klasy VI nie potrafili wykazać się podstawowymi umiejętnościami rachunkowymi a ich prace nie ujawniły stosowania technik pomocniczych (rysunków, tabelek czy oszacowań)?

Spostrzeżenia nauczycieli II etapu kształcenia:

- *niewielu uczniów lubi matematykę,*
- *uczniowie wolą geometrię,*
- *uczniowie czekają na geometrią, bo jest ona okazją do uzyskania dobrych ocen z matematyki,*
- *w II etapie kształcenia jest wprowadzanych dużo nowych pojęć i uczniowie zaczynają je mylić,*
- *uczniowie nie lubią ćwiczyć sprawności rachunkowej,*
- *bardzo mało dzieci jest zainteresowanych uczeniem się matematyki.*

Co jest przyczyną zmian w postrzeganiu przez dziecko matematyki w przeciągu 2 lat nauki w II etapie kształcenia? Małgorzata Taraszkiewicz w *Jak uczyć lepiej? czyli refleksyjny praktyk w działaniu* stwierdza, że „w praktyce szkolnej zmianie ulega metodologia badania świata: samodzielny proces poznawczy zastępują gotowe informacje i przepisy. Obniża się aktywność poznawcza dziecka – stara się ono jedynie zapamiętać właściwe odpowiedzi, często operując niezrozumiałymi dla niego pojęciami lub symbolami.”[3] I dalej autorka omawia 16 metod pracy uprzedzając czytelnika, że „każda metoda może być realizowana jako aktywizująca, bądź nie. Wszystko zależy od zachowania nauczyciela, który może określone reakcje ucznia wyzwolić lub zablokować!”[4].

Do najczęściej polecanych metod aktywizujących ucznia w edukacji matematycznej na II etapie kształcenia zaliczane są:

- pogadanka problemowa,
- praca z podręcznikiem,
- praca laboratoryjna,
- metoda problemowa,
- nauczanie grupowe,
- nauczanie przez rozwiązywanie zadań,
- burza mózgów.

---

[3] M. Taraszkiewicz; *Jak uczyć lepiej? czyli refleksyjny praktyk w działaniu*; CODN, Warszawa 1999; str.13.
[4] J.w.; str.83.

Czy nauczyciele nieumiejętnie organizowali zajęcia oparte na metodach aktywizujących? Zapewne różnie to wyglądało w praktyce, ale załóżmy, że każdy z nas stara się jak najlepiej organizować proces dydaktyczny i każdy z naszych uczniów najlepiej jak umie „dostraja" się do sytuacji lekcyjnej. Czy proponowane metody są nieodpowiednie do kształcenia matematycznego? Literatura podaje zalety i wady każdej z nich. Stosowanie różnych metod powinno więc odnosić skutek u uczniów o odmiennych predyspozycjach.

Być może problem nie tkwi w złym czy niezręcznym stosowaniu metod aktywizujących ucznia?

Może przyczyn bezradności w rachowaniu na ułamkach badanych uczniów klas VI należy doszukiwać się gdzie indziej?

W *Sztuce nauczania matematyki w szkole podstawowej* Danuta Zaremba mocno podkreśla znaczenie geometrycznego ujęcia liczby w kształceniu pojęcia liczby, w działaniach i prawach działań na liczbach naturalnych i na ułamkach.[5]

Powszechnie stosowany sposób radzenia sobie ucznia w każdym wieku z rachunkami na liczbach całkowitych opiera się na odwołaniu do konkretu (palce, kreski, termometr, dół-góra).

Czy wprowadzając ułamki (najczęściej w klasie IV) dbamy o dostarczenie dziecku równie uniwersalnego narzędzia do rachowania? Czy takie narzędzie istnieje?

Ależ tak! Przecież na początku: *uczeń opisuje część figury (zbioru) ułamkiem, uczeń ilustruje ułamek jako część figury (zbioru).* Każde działanie arytmetyczne wprowadzane jest w oparciu o ilustrację (również na konkretach wymagających wykonania pewnych czynności manualnych przez ucznia).

Być może to za mało, aby uczeń uznał, że odwołanie do ilustracji przy wykonywaniu operacji na ułamkach jest **jego narzędziem pracy.**

Dlaczego to właśnie ułamki, są tak trudne dla dziecka? Uczeń radzący sobie całkiem nieźle przed realizacją tego działu staje nagle przed barierą, której nie potrafi, mimo podejmowanych przez siebie wysiłków przekroczyć.

Szukając odpowiedzi na to pytanie zaczęłam się przyglądać jak ludzie dorośli radzą sobie z ułamkami. Wszak dziecko dorasta przyjmując wzorce z najbliższego otoczenia.

W sklepie:
– *Poproszę ćwierć kilograma żółtego sera.*
– *Zosia, 25 dekagramów dla pani.*

W banku:
– *Ma pani na koncie 75 zł 5 gr.* – na wydruku widnieje 75,05 zł.

U lekarza:
– *Pokaże pani ten termometr. 37 i 2 kreski – to mało.*

Dorośli ludzie w życiu codziennym posługują się jednostkami, które jedynie „na papierze" pozostają ułamkami. Przy ich odczytywaniu następuje przejście na jednostki niższego rzędu, które można już wyrazić liczbami całkowitymi. Uczniowie klas czwartych często posiadają umiejętność zapisywania i odczytywania wyra-

[5] D. Zaremba; *Sztuka nauczania matematyki w szkole podstawowej*; GWO, Gdańsk 1993; str. 14.

żeń mianowanych jako wyrażeń dwumianowanych, co spotyka się głównie przy obliczeniach pieniężnych. Jednak po wprowadzeniu ułamków zwykłych i dziesiętnych w II etapie kształcenia można zaobserwować, że uczniowie błędnie odczytują to, co widzą, czyli przykładowo 3,4 jako trzy czwarte. W trakcie dalszej nauki dochodzi również do zaniku umiejętności przywoływania przykładu wielkości, której obrazem może być dana liczba, przykładowo odcinek o długości 3cm i 4 mm.

Danuta Zaremba przekonuje w *Sztuce nauczania matematyki w szkole podstawowej* do czynnościowego wprowadzania pojęcia ułamka i działań na ułamkach. Wymaga to czasu, bo „dziecku trudno znaleźć odpowiedniość między napisanymi symbolami matematycznymi a oznaczoną nimi operacją myślową”[6].

Na marginesie: równie dużo czasu potrzebuje uczeń na przyswojenie słownictwa, którego być może nie spotyka nigdzie, poza zajęciami z matematyki.

Większość znanych mi ludzi dorosłych klasyfikuje jako przedmioty okrągłe przedmioty, o których chcemy, aby nasz uczeń mówił, że mają kształt koła, okręgu, stożka, walca, kuli. Dziwimy się kłopotom dzieci z językiem – piłka jest okrągła. Słów takich jak iloraz, mianownik, ... dziecko nie spotyka w swoim pozaszkolnym życiu.

Czy program, według którego nauczamy naszych uczniów daje nam i im wystarczająco dużo czasu do kształcenia kolejnych pojęć w różnych kontekstach?

Po przeanalizowaniu kilku rozkładów materiałów proponowanych przez autorów zatwierdzonych przez MENiS programów nauczania matematyki można stwierdzić, że oczekuje się od ucznia zbyt szybkiego przejścia do formalnego traktowania ułamka. Bo jak inaczej zinterpretować 15 czy 20 godz. przeznaczonych na realizację działu *Ułamki zwykłe*, kiedy w tym czasie mamy nie tylko ukształtować pojęcie ułamka, jego notacji, ale również wyćwiczyć umiejętności rachunkowe na abstrakcyjnie podanych liczbach? Owszem dzieci sobie z tym radzą, ale jak szybko ich umiejętności uciekają w niepamięć. Fakt, że w następnej klasie jest przewidziane *powtórzenie i utrwalenie* nie jest wystarczający, aby tak popędzać naszych uczniów. Zofia Krygowska pisała o tym, że nauczać w pośpiechu można, kształcić już nie.

Jak wykorzystać naturalne skłonności dziecka do manipulacji materiałem konkretnym? Jak przeprowadzić ucznia od tegoż konkretu do abstrakcyjnego ujęcia liczby w formalizmach rachunkowych?

Stefan Turnau dokonując interpretacji celów kształcenia, zadań szkoły i treści nauczania matematyki w IV etapie kształcenia w artykule *O podstawie programowej dla liceum – „kanon”* stwierdza:

„Geometria może natomiast wypełnić zadanie szkoły, któremu w tradycyjnym nauczaniu mało poświęcało się uwagi. Może stać się szkołą aktywności matematycznej. A składa się na tę aktywność szereg elementów ... . Dla wielu z nich właśnie geometria dostarcza najlepszego materiału kształcącego. Tematy wymienione w *Podstawie programowej* nie zostały dobrane pod tym kątem. Nie znaczy to jednak, że te które są, nie mogą być do takiego kształcenia wykorzystane.”[7]

Wydaje się, że równie dobrze taka uwaga mogłaby zostać poczyniona przy omawianiu *Podstawy programowej* dla II etapu kształcenia.

---

[6] Jw.; s. 32.

[7] „Matematyka” nr 4, lipiec/sierpień 2002; WSiP.

Czy możliwe jest ułożenie kompleksowego programu nauczania opartego na geometrii, która może dostarczyć dziecku materiału umożliwiającego wizualizację nie tylko przy rozwiązywaniu problemów, ale również przy rachowaniu na ułamkach?

Sądzę, że tak. W znanych mi programach zatwierdzonych przez MENiS na realizację zajęć o treściach geometrycznych przeznacza się od 20 do 28% godzin lekcyjnych w poszczególnych klasach II etapu kształcenia. Zajęcia z geometrii przeprowadzane są zazwyczaj pod koniec semestrów (zgodnie z proponowanymi rozkładami materiałów). Bywa, że są okrojone z godzin, które nauczyciel przeznacza na ćwiczenie rachowania na ułamkach. Bywa, że są okazją do przypominania algorytmów rachunkowych.

Mamy szansę to zmieniać. Nie tylko za pomocą wprowadzania poszczególnych metod aktywizujących ucznia, ale tak układając kolejność treści programowych, aby każde dziecko otrzymywało dobry materiał i narzędzie do swojej pracy. Wtedy metody spełnią swoje zadanie. **Każda metoda może być realizowana jako aktywizująca, bądź nie.**

Nasi uczniowie lubią geometrię. Będzie im się chciało rysować, wycinać, naklejać, składać i rozkładać. Będą mierzyć, będą obliczać, będą się kłócić zanim nauczą się dyskutować. Damy im materiał, na którym lubią i potrafią pracować. Być może zauważą i przyjmą do wiadomości, że uznajemy argumentację wyrażoną ilustrowaniem ich toku rozumowania. Być może nie będziemy musieli ich przekonywać, że rysunek jest często kluczowym punktem opracowania rozwiązania zadania.

Za jeden z czynników hamujących zabieranie głosu na lekcjach matematyki uznaję świadomość ucznia dotyczącą małego zasobu fachowego słownictwa oraz problemy z werbalizacją natury ogólniejszej. Nierzadko zdarza się, że uczeń ***odkrywający*** *potrafi przekazać swoje spostrzeżenia bazując jedynie na gestykulacji i wypowiedziach typu „i jak to do tego, a tu wyjdzie, i pani widzi, no, pani wie".*

W tym roku uczę matematyki w klasach czwartych według własnego programu. Układając go nie mogłam się pozbyć natrętnych myśli, że robię źle, że tak nie można, że to co proponują uznani autorzy programów jest lepsze.

Pracując przez siedem lat z uczniami klas czwartych rozpoczynaliśmy rok szkolny od powtórzenia, utrwalenia, poszerzenia i usystematyzowania wiadomości o liczbach naturalnych z klas I-III. Tym razem rozpoczęłam od figury geometrycznej i jej obwodu. Po raz pierwszy prowadzę równolegle trzy klasy czwarte. W każdej z nich lekcje przebiegają inaczej, ale nigdzie nie spotkałam się ze znużeniem, znudzeniem i niechęcią, które to pojawiały się przy powtórkach dotyczących liczb naturalnych. Przywołane wcześniej badania sprawności rachunkowej zostały przeprowadzane na moją prośbę. Musiałam się przekonać, że mam rację proponując uczniom coś innego niż dotychczas, nie na podstawie intuicji ale konkretnego pomiaru. Uczniowie w różny sposób mierzyli i obliczali obwody różnych figur, w tym również równobocznych i foremnych. Układając kształty figur za pomocą sznurka o danej długości czynili spostrzeżenia dotyczące boków i powierzchni figur o stałym obwodzie. Przy mierzeniu za pomocą cyrkla odkryli konstrukcyjny sposób porównywania obwodów figur, co było podstawą do powtórzenia pojęcia osi liczbowej i rozwiązywania zadań dotyczących tego zakresu materiału. Pojawiły się również *połówki i ćwiartki.*

W przeciągu sześciu tygodni, przy realizacji tematu przewodniego *Obwód figury*, tylko 2 lekcje w całości poświęcone były ćwiczeniom rachunkowym z zakresu dodawania i odejmowania sposobem pisemnym. Odbyły się dopiero wówczas, kiedy mogłam uczniom powiedzieć, że mają mnóstwo ładnych pomysłów, że świetnie radzą sobie z zadaniami, ale warto poćwiczyć rachunki, bo zdarzają się im pomyłki. Myślałam, że jest to wystarczająca argumentacja, aby uczniowie byli wystarczająco umotywowani do zajęć, tym bardziej, że ochoczo ćwiczyli zamianę jednostek długości. Nie!!! Protest podniósł się głośny i jednogłośny we wszystkich klasach. Mimo tego zajęcia odbyły się, ale czy przy takim nastawieniu mogły odnieść skutek?

Nie potrafię przewidzieć, czy wprowadzone zmiany w programie nauczania matematyki przyczynią się do lepszego ukształtowania pojęcia ułamka, ale mam nadzieję, że uczniowie będą *„gotowi do działania"*, aby zgłębiać dalsze tajniki matematyki.

Uczniowskie sposoby rozwiązywania zadania – początek roku szkolnego, kl. IV

Pan Tadzio kupił działkę budowlaną w kształcie prostokąta o długości 47m 12cm i szerokości 38m 48cm. Chce teraz zatrudnić robotników do wykopania rowu pod ogrodzenie działki. Jaki długi rów będą musieli wykopać robotnicy?

47m 12cm
+38m 48cm
85m 60cm

85m 60cm
+85m 60cm
171m 20cm

47 +47 94	38 +38 76	12 +12 24	48 +48 96
94 + 76 170	24 +96 120	120cm = 1m 20cm	
		razem: 171m 20cm	

47,12
38,48
47,12
+38,48
171,20

czyli 171m 20cm

m	cm
47	12
47	12
38	48
38	48
170	120
171	20

47m 12cm * 2 94m 24cm	38m 48cm * 2 76m 96cm	94m 24cm +76m 96cm 171m 20cm

2 * 47m 12cm + 2 * 38 m 48cm = 94m 24cm + 76m 96 cm = 171m 20cm

(47m 12cm +38m 48cm) * 2 = 85m 60cm * 2 = 170m 120cm = 171m 20cm

Błędy:

- ***pewna liczba uczniów po wykonaniu szkicu działki i opisaniu jej boków oblicza obwód jako sumę dwóch sąsiednich boków prostokąta, mimo iż potrafią wyjaśnić jak należy obliczyć obwód dowolnej figury.***