Edukacyjny folklor

Andrzej Majhofer

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Wiedza przekazywana uczniom i studentom w podręcznikach oraz podczas lekcji i wykładów z fizyki podlega nieustannym zmianom – w przekonaniu nauczycieli i autorów podręczników są to oczywiście zmiany na lepsze. Wynikają przecież z uwzględniania wyników najnowszych badań: wprowadzania informacji o najnowszych odkryciach i usuwania twierdzeń, które właśnie zostały obalone. Z podręczników już dawno zniknęły (słusznie) masy magnetyczne, a „na ich miejsce" pojawiły się ostatnio „ciemna materia" i „ciemna energia", bo szanujący się maturzysta musi przecież umieć „czytać ze zrozumieniem teksty popularnonaukowe". Unowocześnianiu wykładu towarzyszy niestety niemal niezauważalny proces powielania także informacji niepełnych, nieścisłych lub wręcz całkiem błędnych. Wynika on z koniecznych w nauczaniu, a często zbyt daleko idących uproszczeń, odwoływania się do modeli matematycznych poza zakresem ich stosowalności, ulegania urokowi prostych i bardzo przekonujących, chociaż błędnych objaśnień. Często dopiero pytanie dociekliwego ucznia uświadamia nam, nauczycielom, że znane nam „od zawsze" wyjaśnienie omawianego właśnie zjawiska jest co najmniej niepełne, a czasami nawet, że wręcz nie może być poprawne. Zaczynamy wtedy poszukiwać poprawnej odpowiedzi: przeprowadzamy doświadczenia, wykonujemy obliczenia odwołujące się do podstawowych praw fizyki, przeglądamy fachową literaturę... Przeważnie okazuje się przy tym, że „nasze" wątpliwe wiadomości znajdujemy w wielu podręcznikach – być może słyszeliśmy je już od naszych nauczycieli – nigdzie jednak nie znajdujemy ich źródła. Takie właśnie wiadomości: znane *wszystkim*, *od zawsze*, ale nie wiadomo skąd – jak ludowe przyśpiewki, pozwalam sobie, zbiorczo, nazywać *edukacyjnym folklorem*. Niektóre z nich są tylko nie dość precyzyjne, inne – niepełne, jeszcze inne błędnie tłumaczą rzeczywiste zjawiska, ale są i takie, które odwołują się do nieistniejących faktów. Poniżej przytaczam przykłady, na które natknąłem się studiując literaturę (nieocenione jest tu czasopismo American Journal of Physics) i prowadząc zajęcia ze studentami, zmuszony poniewczasie korygować własne błędy.

Historia fizyki

„Pomiary Ole Rømera". Wiele podręczników fizyki podaje, że Ole (Olaus) Rømer jako pierwszy wyznaczył prędkość światła i nawet często przytaczają uzyskaną przez niego wartość. Odkrycie Rømera polegało jednak na stwierdzeniu, że wartość ta jest skończona [1-4]. W ten sposób wyjaśniał zmierzone nieregularności w czasach obserwowanych zaćmień Io – jednego z

księżyców Jowisza. W czasach Rømera był to pogląd nowy, trudny do przyjęcia przez wielu współczesnych mu uczonych. Hipotezy tej nie akceptował nawet Jean-Dominique Cassini, z którym Rømer wykonywał obserwacja zjawiska [4]. Hipoteza została opublikowana przez Rømera w Journal des Sçavans 7 grudnia 1676, a tekst doniesienia nie zawierał informacji o wartości prędkości światła.

Model atomu wodoru. Pokolenia uczniów i studentów dowiadują się, że Niels Bohr sformułował swój model atomu wodoru w celu wyjaśnienia dyskretnych linii widma promieniowania atomu. Jak jednak wspomina Werner Heisenberg – jak sądzę świadek bardzo wiarygodny – w długiej rozmowie Bohr opowiedział mu, że:

> *Punktem wyjścia nie była myśl o tym, że atom jest miniaturowym układem planetarnym i że można tu stosować prawa astronomii. Tak dosłownie nigdy tego wszystkiego nie brałem. Punktem wyjścia była dla mnie natomiast stabilność materii, która jest przecież czystym cudem z punktu widzenia dotychczasowej fizyki* (cytat w tłum. K. Napiórkowskiego [5]).

„Doświadczenie Rutherforda”. Jak wiadomo, wspomniany przez Bohra planetarny model atomu powstał dla wyjaśnienia wyników tzw. doświadczenia Rutherforda. Doświadczenie badające rozpraszanie cząstek α na folii ze złota wykonali jednak Hans Geiger i Ernest Marsden [6-7] pracujący w laboratorium kierowanym przez Ernesta Rutherforda. Wyniki zaskoczyły ich obu i samego Rutherforda, który dopiero po kilku tygodniach podał interpretację rozpraszania cząstek α pod dużymi kątami jako wynik istnienia naładowanych jąder atomowych skupiających niemal całą masę atomu.

Prawa Keplera. Jednym z głównych źródeł nieścisłości w komentarzach dotyczących historii fizyki jest niezrozumienie kontekstu, w jakim pojawiały się omawiane odkrycia. Tak właśnie jest w przypadkach opisanych wyżej odkryć Rømera i Bohra. Ciekawym przykładem jest tu także sposób, a właściwie sposoby, formułowania III prawa Keplera w podręcznikach astronomii i fizyki. Początek sformułowania jest zawsze ten sam:

Dla wszystkich planet stosunek:

$$\frac{a^3}{T^2}$$

ma tę sama wartość, przy czym T jest okresem obiegu Planety dookoła Słońca, natomiast a oznacza, (tu podręczniki reprezentują dwie różne „szkoły”):
- średnią odległością Planeta-Słońce;
- dużą półosią orbity.

Która jest poprawna – a może są one równoważne? Przyjrzyjmy się dokładniej. Zgodnie z I prawem Keplera planeta obiega Słońce po orbicie eliptycznej, dla której odległość Planeta-Słońce r jako funkcja kąta φ między promieniem wodzącym planety i kierunkiem Słońce-perihelium planety dana jest równaniem:

$$r(\wp) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\wp)},$$

w którym p i e są dodatnimi stałymi.

Maksymalna odległość od Słońca (aphelium) wynosi:

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - e},$$

a minimalna (perihelium):

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}.$$

Równanie opisuje elipsę o półosiach:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{1}{2}\left(r_{\min} + r_{max}\right)$$

oraz

$$b = a\sqrt{1 - e^2}\ .$$

Łatwo możemy obliczyć, że uśredniona względem kąta odległość Planeta-Słońce wynosi:

$$\left\langle r \right\rangle_{\wp} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\wp)\, d\wp = b,$$

natomiast odległość uśredniona względem czasu (w obliczeniach korzystamy z II prawa Keplera):

$$\left\langle r \right\rangle_t = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right).$$

Otrzymaliśmy dwie różne wartości i żadna z nich nie jest równa długiej półosi a orbity [8-11]. W tym miejscu warto uświadomić uczniom/studentom, że takie rozumienie pojęcia średniej funkcji ciągłej, z jakiego skorzystaliśmy w obliczeniach, mogło się pojawić dopiero po odkryciu rachunku całkowego kilkadziesiąt lat po śmierci Keplera. Dla niego oczywistym i jedynym możliwym rozumieniem pojęcia „odległość średnia” była średnia arytmetyczna odległości największej i najmniejszej. Oznacza to, że średnia odległość Planeta-Słońce wg

Keplera to:

$$\langle r \rangle_{\text{Kepler}} = \frac{1}{2}\left(r_{\min} + r_{max}\right) = a\,.$$

Podczas wykładów z fizyki trzy prawa Keplera pojawiają się jako elementy rozwiązania zagadnienia ruchu dwu ciał o masach M i m przyciągających się (centralną) siłą malejącą z kwadratem odległości. Rozwiązanie pozwala powiązać wartość „stałej” w III prawie Keplera z wielkościami mas obu ciał:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}\,.$$

W tym miejscu zwykle kończy dyskusję krótka uwaga o tym, że masa całego Układu Słonecznego jest bardzo nieznacznie większa od masy Słońca – oznaczonej w powyższym wzorze jako M, a dla każdej z planet jej masa m jest tak mała w porównaniu z M (dla najmasywniejszej z planet, Jowisza, $m/M < 0.001$), że można ją pominąć otrzymując III prawo Keplera. Sądzę, że warto poświęcić więcej czasu na dyskusję, na ile rozwiązanie zagadnienia dwóch ciał „wyjaśnia” sformułowane wyłącznie na podstawie obserwacji prawa Keplera. Poza ogromem masy Słońca ważne jest także takie położenie planet, że ich wzajemne przyciąganie powoduje bardzo niewielkie zaburzenia ich „keplerowskich” ruchów.

„Wyjaśnienia” zjawiska fizycznych

Rozszerzalność temperaturowa ciał stałych. Już w szkole podstawowej na lekcjach przyrody uczniowie badają jak ciała stałe rozszerzają się po ogrzaniu. Niewiele później, w gimnazjum, gdy już wiedzą, że materia zbudowana jest z atomów, z wielu podręczników dowiadują się, że zjawisko rozszerzalności ciał stałych jest przejawem zwiększania amplitudy drgań atomów ogrzewanego kryształu. Jest to wyjaśnienie mylące. To prawda, że wraz ze wzrostem temperatury kryształu rośnie energia drgań termicznych, a z nią także ich amplituda. Zwiększenie średnich odległości między atomami wynika jednak z anharmoniczności oddziaływań międzyatomowych – zbliżaniu atomów przeciwdziała większa siła odpychająca niż siła przyciągająca przeciwdziałająca ich oddalaniu. To dzięki temu wraz ze wzrostem energii drgań zwiększają się odległości średnich położeń atomów, co w skali makroskopowej obserwujemy jako „rozszerzanie się” ciała stałego. Kryształ, w którym atomy oddziaływałyby tak, jakby były połączone sprężynkami (spełniającymi prawo Hooke'a) nie rozszerzałby się pod wpływem ogrzewania – zwiększeniu amplitudy drgań termicznych nie towarzyszyłoby zwiększenie średnich odległości międzyatomowych. Dokładniejszą, ilościową dyskusję zagadnienia rozszerzalności termicznej ciał stałych znaleźć można w podręcznikach fizyki ciała stałego [12,13].

Jaki jest kształt orbity Księżyca względem Słońca? W wielu miejscach w podręcznikach fizyki znajdują się schematyczne rysunki przedstawiające wzajemne położenia Słońca, Ziemi i Księżyca. Schematyczne, bo dla zwiększenia czytelności nie są zachowane proporcje rozmiarów ciał i ich wzajemnych odległości. Wszyscy zdajemy sobie z tego sprawę, ale zapamiętane obrazki są bardzo sugestywne. Pytani o kształt orbity Księżyca w jego ruchu wokół Słońca spontanicznie rysujemy zwykle tor z wieloma „pętelkami”. Rzeczywisty tor jest jednak owalem wypukłym (w każdym punkcie!) i bardzo nieznacznie różniącym się od eliptycznej orbity Ziemi – podręcznik Eugeniusza Rybki [14] jest jedynym miejscem, gdzie znalazłem przekonujący rysunek. Łatwo zrozumieć dlaczego tak jest – wypadkowa sił przyciągania Księżyca przez Ziemię i Słońce zawsze (w każdym punkcie toru) jest skierowana do Słońca. Każdy fizyk od razu to rozumie, ale ile razy o to pytałem kolegów-fizyków zawsze poprawna odpowiedź przyjmowana była z wielkim zaskoczeniem (i natychmiast wykorzystywana jako zadanie na ćwiczeniach z mechaniki [15]). Tak zgubne mogą być skutki uproszczonego rysunku.

Dlaczego jest ślisko na łyżwach? Każde dziecko poprawnie odpowie, że to dzięki cienkiej warstewce wody pomiędzy łyżwą i powierzchnią lodu. A skąd ta woda? Tu większość podaje odpowiedź: warstwa wody pojawia się, bo lód topnieje gdy jest poddawany ściskaniu. To prawda, że w temperaturze niewiele niższej od temperatury topnienia ściskany lód zaczyna topnieć – w przypadku jazdy na łyżwach i nartach zjawisko to nie odgrywa jednak znaczącej roli. Decydują dwa inne zjawiska: wytwarzanie ciepła pod wpływem tarcia łyżwy o lód i szczególne właściwości powierzchni lodu. Już w latach trzydziestych XX w F. P. Bowden i T. P. Hughes doświadczalnie wykazali znaczenie produkcji ciepła przez tarcie podczas jazdy na nartach i łyżwach. Fakt, że powierzchnia lodu nawet znacznie poniżej temperatury zamarzania pokryta jest cienką warstwą ciekłej wody dostrzegł już M. Faraday (w roku 1859). Dopiero jednak w ostatnich latach „topnienie powierzchniowe” (nie tylko wody) jest intensywnie badane. Szczegółową dyskusję zagadnienia „śliskości lodu” znaleźć można w artykule R. Rosenberga [16].

Dlaczego szybki średniowiecznych witraży są grubsze u dołu? Dosyć powszechnie spotykane tłumaczenie odwołuje się do faktu, że szkło jest przechłodzoną cieczą o wielkiej lepkości, a więc „płynie” i po kilku wiekach szybka staje się grubsza w swej dolnej części. Sam fakt, że szybki witraży są u dołu grubsze jest podobno dobrze znany badaczom średniowiecznej sztuki. Jednak jak udowadnia E. D. Zanotto [17] skala czasowa „płynięcia szkła” w temperaturze ok. 300 K jest zbyt mała, żeby jego skutki można było zaobserwować już po kilkuset latach. Obserwowaną w witrażach skalę zmian grubości można by zaobserwować dopiero po $2 \cdot 10^{23}$ lat [18]. Przyczyna obserwowanych różnic grubości jest zapewne związana ze sposobem produkcji tafli szklanych w średniowieczu.

Siły Coriolisa decydują o kierunku wiru w odpływie z wanny. Jak można zaobserwować na mapach pogody, wiatry na półkuli północnej skręcają w prawo, a na półkuli południowej w lewo. Wynika to z faktu, że Ziemia obraca się, a w związku z tym układ odniesienia związany z jej powierzchnią jest układem nieinercjalnym i poprawny opis ruchu w tym układzie wymaga uwzględnienia sił bezwładności: odśrodkowej i Coriolisa. To właśnie siła Coriolisa jest „odpowiedzialna" za zakrzywianie kierunku ruchu wiatrów. W podobny sposób tłumaczone bywa powstawanie wirów w odpływie wody z wanny (zlewu) – niestety, całkowicie błędnie. Po pierwsze: to nieprawda, że taki wir kręci się zawsze w tę sama stronę – w tej samej wannie w kolejnych doświadczeniach można zaobserwować oba kierunki obrotu. Kierunek wiru zależy od „historii" wody w wannie. Historii, a więc np. sposobu w jaki nalewaliśmy wodę i sposobu w jaki wyciągaliśmy korek itp. Siła Coriolisa jest bardzo słaba, a wiry raz wytworzone w cieczy zanikają powoli (w cieczach nielepkich podlegają zasadzie zachowania – twierdzenia Helmholtza i Kelvina). Jak wykazują doświadczenia, dopiero po całych dniach oczekiwania po nalaniu wody do idealnie symetrycznej wanny, po usunięciu korka w sposób nie powodujący powstania wirów, można zaobserwować ruch wody zgodny z tym, jaki wynika z działania siły Coriolisa [19].

Doświadczenie ze świeczką wodą i szklanką. Każdy z nas zapewne wielokrotnie widział doświadczenie, w którym płonącą świeczkę stojącą w płytkiej wodzie przykrywa się odwróconą szklanką. Po kilku sekundach świeczka gaśnie, a woda jest wsysana do szklanki – poziom wody w szklance podnosi się. Doświadczenie to często wykonywane jest na lekcjach przyrody. Standardowe „tłumaczenie": świeczka zgasła, gdy wypalił się tlen, a na miejsce zużytego tlenu została wessana woda. Każdy, kto przypomni sobie chemię na poziomie nauczanym w gimnazjum szybko jednak dojdzie do wniosku, że w procesie spalania gazu przybywa, a nie ubywa. To prawda, że ubywa tlenu (dlatego gaśnie świeczka), ale przecież spalaniu ulegają tu węglowodory, z których składa się świeczka. W procesie spalania węglowodorów powstają gazy: dwutlenek węgla – CO_2 , para wodna – H_2O oraz tlenek węgla – CO. Jak widać, z każdej cząsteczki tlenu – O_2 powstaje jedna lub dwie cząsteczki produktów spalania – gazów więc przybywa. Spalanie powoduje przecież także ogrzanie gazów wokół świeczki, a więc ich rozszerzenie. Po zgaśnięciu świeczki gazy szybko ochładzają się i zmniejszają swą objętość – właśnie to zjawisko powoduje „zasysanie wody" do szklanki. Warto z uczniami (już nawet w szkole podstawowej) dokładniej zbadać przebieg doświadczenia w zależności od liczby użytych świeczek [20]. Pomiary wysokości słupa wody w szklance przed przykryciem szklanką i po zgaśnięciu świeczki pozwalają oszacować zmiany temperatury gazu [21].

Ile ogniskowych ma soczewka? Równanie soczewki należy do ulubionych tematów wielu zadań, które polegają głównie na przekształcaniu na wszelkie możliwe sposoby wzoru:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f},$$

w którym x i y oznaczają, odpowiednio, położenie przedmiotu i obrazu, a f odległość ogniskową. Drugi, oddzielny wzór – ostatnio zdaje się „nieobowiązkowy” w programie nauczania – wiąże ogniskową f z promieniami krzywizny soczewki i współczynnikiem załamania materiału, z jakiego jest wykonana. Na całe życie pozostaje uczniom przekonanie, że każdą soczewkę charakteryzuje długość jej ogniskowej. Dążenie do jak najszybszego wprowadzenia materiału do formułowania licznych zadań zabija tu jednak zrozumienie fizyki zjawiska. Soczewka ma dwie powierzchnie łamiące i analiza biegu promieni w soczewce powinna przede wszystkim podkreślać ten fakt. Pełniejszy wzór dla soczewki cienkiej o współczynniku załamania n_2 i promieniach krzywizny R_1 i R_2 (dodatni znak krzywizny dla powierzchni wypukłej względem środka soczewki) znajdującej się między ośrodkami o współczynnikach załamania n_1 i n_3 ma postać [22]:

$$\frac{n_1}{x}+\frac{n_3}{y}=\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_2-n_3}{R_2},$$

gdzie x i y oznaczają, odpowiednio, odległość przedmiotu (punkt w ośrodku n_1) i obrazu (punkt w ośrodku n_3) od soczewki (wyprowadzenie tego wzoru nie jest ani trochę bardziej skomplikowane od wyprowadzenia standardowego „szkolnego” znajdującego się kilka linijek wyżej). Z przytoczonego wzoru można w szczególnym przypadku $n_1 = n_3$ uzyskać oba wzory wspomniane poprzednio. Jeśli jednak wartości n_1 i n_3 są różne, to odległości, w których soczewka skupia wiązkę równoległą padającą od strony ośrodka n_1 (granica $x \to \infty$) i od strony ośrodka n_3 ($y \to \infty$) są różne. Łatwo to pokazać doświadczalnie przyklejając soczewkę płasko-wypukłą do ścianki napełnionego wodą szklanego akwarium i oświetlając ją wiązką równoległych promieni (np. wskaźników laserowych) najpierw od strony powietrza, a następnie od strony wody. Widać wówczas, że *lewa* i *prawa* odległość ogniskowa mają różne wartości – co wynika także z przytoczonego wyżej wzoru. Naprawdę warto wykonać to doświadczenie z uczniami.

Z jakim przyspieszeniem wznosi się balon? Jedno z ulubionych zadań „szkolnej fizyki” brzmi mniej więcej tak:

> „Z jakim przyspieszeniem a wznosi się balon o objętości V i całkowitej masie m? Gęstość powietrza wynosi ρ, a przyspieszenie ziemskie g”.

Dane liczbowe są zwykle dobrane tak, żeby obliczona przez ucznia wartość siły wyporu F była większa od ciężaru balonu Q. Oczekiwana odpowiedź to: $a = (F\text{-}Q)/m$. Przecież to kompletna bzdura! F-Q, to siła potrzebna do utrzymania balonu na ustalonej wysokości. Kiedy jednak analizujemy wznoszenie (lub opadanie) balonu, to nie możemy zapominać, że wznoszeniu opadaniu) balonu towarzyszy opadanie (wznoszenie) powietrza! Sytuacja jest podobna jak w przypadku równoramiennej dźwigni, na której leżą dwie nierówne masy $m < M$ – do utrzymania dźwigni w poziomie potrzebna jest siła o wartości $g(M - m)$, ale po jej usunięciu przyspieszenie masy M w dół, a masy m do góry wynosi:

$$a = \frac{g(M - m)}{M + m}.$$

W przypadku balonu sytuacja jest analogiczna: należy uwzględnić, że porusza się także ośrodek uwzględniając „w mianowniku” tzw. masę dodaną, która jest równa masie wypartego powietrza pomnożonej przez współczynnik rzędu jedności – dokładna wartość tego współczynnika zależy od kształtu ciała, którego ruch opisujemy [23,24]. Dla kuli ten współczynnik wynosi ½ [23]. Zmierzenie początkowego przyspieszenia w ruchu balonu jest bardzo trudne, bo ze względu na znaczne siły oporu ruchu prędkość dosyć szybko osiąga stałą (graniczną) wartość. Dotyczy to nie tylko balonu, ale także pęcherzyków powietrza w wodzie itp. Uwaga „pomiń opory ruchu” jest niestety częstym elementem treści zadań dotyczących ruchu w powietrzu lub wodzie – bardzo często w przypadkach, gdy właśnie tych oporów pominąć nie można, jeśli wynik zadania ma mieć coś wspólnego z rzeczywistym przebiegiem zjawisk. Nawet dla ruchu w powietrzu i to już przy niezbyt znacznych prędkościach siła oporu ośrodka może mieć znaczną wartość. Gdy rzucamy kamieniem, to opór powietrza możemy pominąć, ale na lot rzuconej piłki plażowej ma on już duży wpływ. Formułując zadania warto zastanowić się, czy mają to być zadania z fizyki, czy z psychologii – tzn. czy uczeń ma wykazać się zrozumieniem zjawisk fizycznych, czy tylko umieć odgadnąć jakiż to wzór miał na myśli autor zadania.

Literatura

[1] A. K. Wróblewski, American Journal of Physics **53**, 620 (1985).
[2] A. K. Wróblewski, *Prawda i mity w fizyce*, Iskry, Warszawa, 1987, str. 39,
[3] A. K. Wróblewski, *Historia Fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999, str. 167.
[4] L. Bobis, J. Lequeux, Journal of Astronomical History and Heritage, **11**, 97 (2008).
[5] W. Heisenberg, *Część i całość: rozmowy o fizyce*, PIW, 1987, str. 59.
[6] E. Segrè, *From X-Rays to Quarks*, W. H. Freeman and Company, New York, 1980, str. 102.
[7] A. K. Wróblewski, *Historia Fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999, str. 449.
[8] R. A. Aziz, American Journal of Physics, **34**, 538 (1966).
[9] J. E. Prussing, American Journal of Physics, **45**, 1216 (1977).

[10] M. Bucher, D. P. Siemens, American Journal of Physics, **66**, 88 (1998).
[11] M. Bucher, D. Elm, D. P. Siemens, American Journal of Physics, **66**, 929 (1998).
[12] C. Kittel, *Wstęp do fizyki ciała stałego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999, str. 152.
[13] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Fizyka ciała stałego*, PWN, Warszawa, 1986, str. 581.
[14] E. Rybka, *Astronomia ogólna*, wyd. 7., PWN, Warszawa, 1983, str. 116.
[15] „Delta” 5/2013, *Zadanie F831*.
[16] R. Rosenberg, Physics Today, December 2005, p. 50.
[17] E. D Zanotto, American Journal of Physics, **66**, 392 (1998).
[18] E. D. Zanotto, P. K. Gupta, American Journal of Physics, **67**, 260 (1999).
[19] A. H. Shapiro, Nature **196**, 1080 (1962); L. M. Trefethen, R. W. Bilger, P. T. Fink, R. E. Luxton, and R. I. Tanner, Nature **207**, 1084 (1965); P. Plait, *Bad Astronomy*, John Wiley & Sons, New York, 2002, p. 21.
[20] Mick O'Hare, *Skamieniałość z chomika. Zrób to sam*, Insignis Media, Kraków, 2011. str. 118.
[21] „Delta” 4/2014, *Zadanie F853*.
[22] J. R. Mayer-Arendt, *Wstęp do optyki*, PWN, Warszawa, 1979, str. 49.
[23] L. Landau, E. Lifszyc, *Hydrodynamika*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2009, § 11 zadanie 1.
[24] LVII Olimpiada Fizyczna (2007/2008), stopień I, zadanie D3 – www.dydaktyka.fizyka.szc.pl